



TITLE:

点熱源からの熱対流 (流体力学における混合境界値問題)

AUTHOR(S):

桑原, 邦郎; 大島, 裕子

CITATION:

桑原, 邦郎 ...[et al]. 点熱源からの熱対流 (流体力学における混合境界値問題). 数理解析研究所講究録 1979, 360: 127-141

ISSUE DATE:

1979-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104523>

RIGHT:

熱源からの熱対流

東大 エ 桑原 邦郎

お茶の水大理 大島 裕子

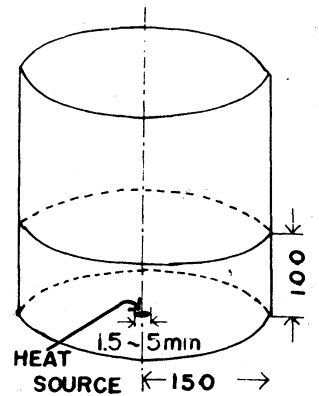
はじめに.

火のついた線香からまっすぐに立ちのぼる煙, これは熱源からの上昇流の可視化に他ならない。周囲が静かなときは高くまでまっすぐに上昇するが, 周囲の空気に乱れがあるときはその途中からくるくると, 又はゆうゆうとゆうぎながらの上昇となる。熱による空度の差が浮力を生ずるいわゆる熱対流の現象は, 幾多の研究者によつて古くから行われて^{1~4)}いるが, それらについて Turner⁵⁾が Annual Review (1969) に要約している。それによると彼は種々のことか解けてはいるものの, まだやるべきことは沢山あるといっている。

さてこの熱対流が熱源を中心として回転したばあい, 流れの場はどうなるであろうか。自然界の中は台風現象は線香とは較べられないほど大きい規模であるが, その中心においてエネルギーが供給されることによつて上昇流がおこり, そ

のまわりに地球の自転に起因する回転があることから似た現象であるように思われる。そこで大きな自然熱源からの上昇流について、熱を含む Navier-Stokes の方程式を数値的に解くとともに、同じ条件で実験を行った。今回は回転の入らないばあいについての報告を行う。

ここで考える問題は 1 図に示すような半径 15 cm の円筒状の水槽の底の中心部に、直径 $D = 3 \text{ mm}$ から 10 mm の熱源を置き、水深 10 cm に水を入れたときにおける熱対流を調べた。



1 図

§ 基礎方程式

温度 T_a の一様な流体中に温度 $(T_a + \Delta T)$ の熱源を置くとき、温度差による密度の差で浮力が生じ、流れ場が運動が起こる。この現象をあらわす基礎方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(1 + \frac{\delta \tilde{p}}{\rho_0}\right) X_i + \nu \Delta u_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \Delta T \quad (3)$$

となり、それぞれ (1) 連続の式、(2) 運動の方程式、(3) 温度の方

程式である。ここで温度差による密度差は浮力に影響を及ぼすだけであるという、いわゆる Boussinesq 近似が用いられ、又外力として重力場にあるという次式が用いられる。

$$\frac{\delta \bar{P}}{\bar{P}_0} = -\alpha \Delta T \quad (4)$$

$$X_i = (0, 0, g) \quad (5)$$

熱源から、熱対流は軸対称現象であるから、円筒座標 (r, φ, z) を用い、 $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $v_\varphi = 0$ とし、(1) ~ (3) を書きかえらば

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{P}_0} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = & -\frac{1}{\bar{P}_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ & - (1 - \alpha \Delta T) g \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (9)$$

となる。又渦度 ω と流れ函数 ψ を用いて (6) ~ (9) を書きあらわめると、

$$\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \omega \\ = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \omega \right) - \alpha g \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \quad (12)$$

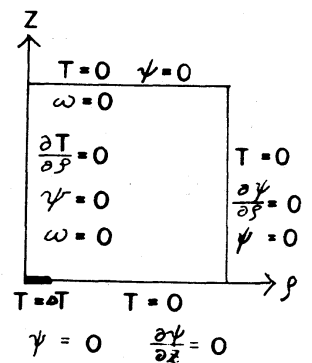
ここで熱対流においてはその主な流れは、熱源のある $r=0$ に近い領域に限られるので、 $r=p^2$ という変換をすることによって差分方程式にしたときに中心部分の变化の大きいところでのメッシュ間隔を細かく、ほとんど動きのない周辺部分にゆくにつれて間隔を粗くして、計算の効率をあげることを考慮した。すなわちこれによって (10)~(12) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{2p^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \frac{\omega}{p^4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ + \nu \left(\frac{1}{4p^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{1}{4p^2} \frac{\partial \omega}{\partial p} - \frac{\omega}{p^4} \right) - \frac{\alpha g}{2p} \frac{\partial T}{\partial p} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2p^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{1}{4p^2} \frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{4p^2} \frac{\partial T}{\partial p} \right) \quad (14)$$

$$\omega = -\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{4p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{3}{4p^2} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

の式に変換される。境界条件は2図に示すように温度については、熱源部で $T=\Delta T$ 、それ以外で $T=0$ 、中心線上で $\frac{\partial T}{\partial p}=0$ 、 ω については中心線上と表面上で $\omega=0$ 、 ψ についてはすべての境界上で $\psi=0$ 、外側の境界 $p=a$ で $\frac{\partial \psi}{\partial p}=0$ と底面で $\frac{\partial \psi}{\partial z}=0$ とする。



2 図

§ 数値計算

(13) ~ (15) 式を差分でおきかえる。このとき非線型項

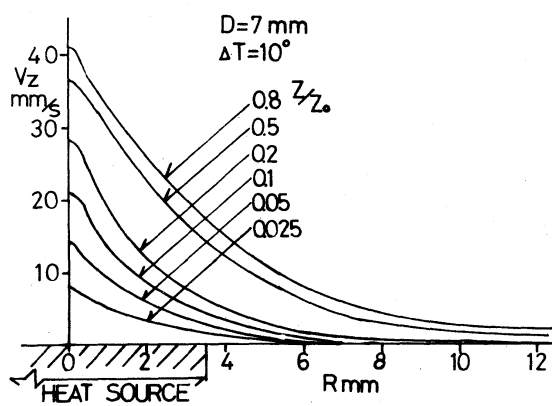
$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z}$$

は上流差分を用い、時間項は定常問題と考えるので $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ とした。それ以外の項は中心差分を用いている。

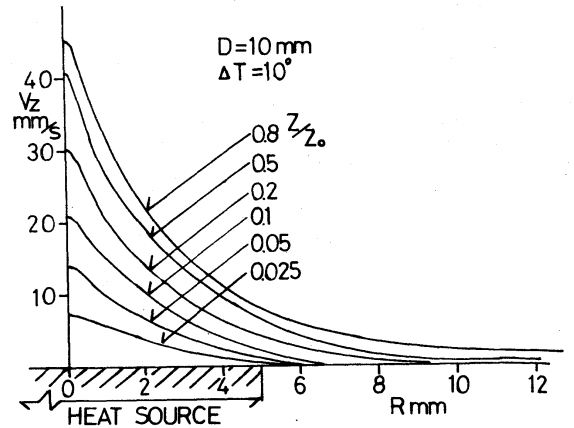
(13), (14), (15) の数値積分は Successive under relaxation によった。 $r = 1.5 \text{ mm}$ ($D = 3 \text{ mm}$) については、この方法によって定常解を求められたが、 $r = 3.5 \text{ mm}$ ($D = 7 \text{ mm}$) についてはこの方法では安定な収束が得られなかった。そこで非定常問題として考えなおし (13), (14) の時間項 $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ を単純前進差分として解を求め、それが十分大きくなったところを定常解とした。計算のメッシュは最終的に 40×40 にした。又計算で使った物性常数は 20°C のものを使用した。

§ 計算結果

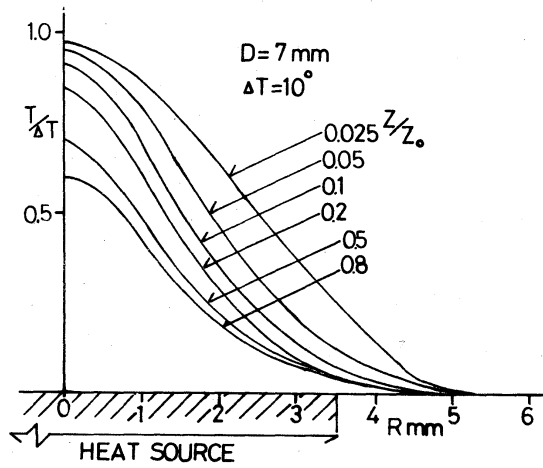
直径 7 mm の熱源に温度差 $\Delta T = 10^\circ$ を与えたときに生ずる対流の上面の流速分布を図に、温度分布を図に高さを表して示し、又中心線上での高さ方向の速度と温度の分布を図に示す。直径 10 mm , $\Delta T = 10^\circ$ のばあいの 3 ~ 5 図に対応する同様の分布を 6 ~ 8 図にそれぞれ示す。速度と温度の 4 つの



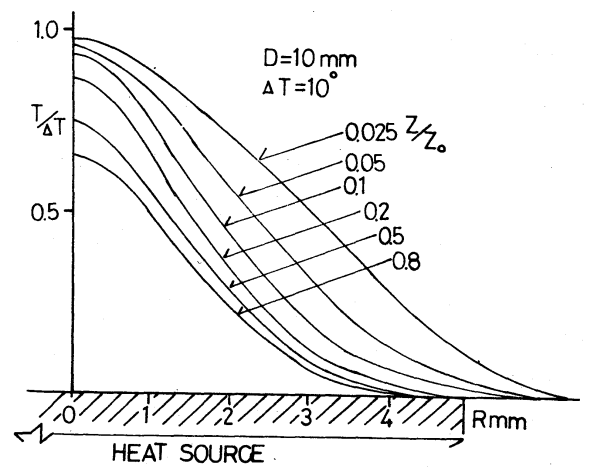
3 图



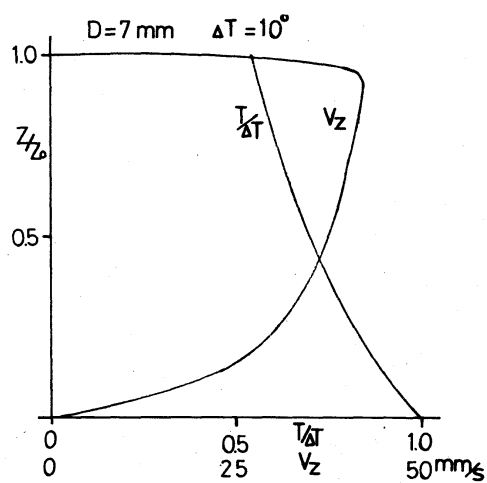
6 图



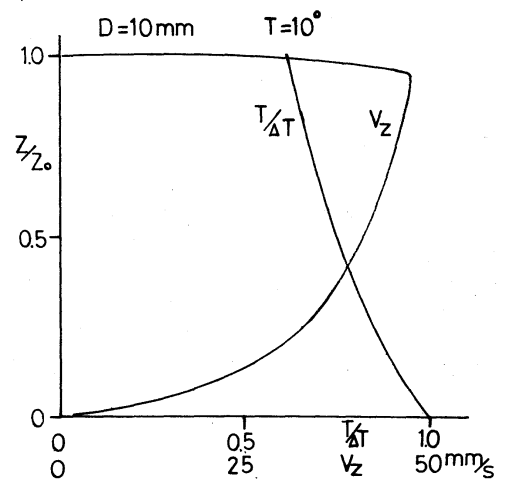
4 图



7 图



5 图



8 图

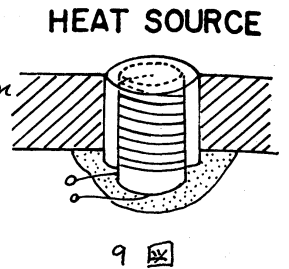
図は円筒の中心を通つて軸対称であるので、中心を左側にして1断面の半分だけを示した。参考のために熱源の大きさを図中に示した。また速度分布に比較して温度の変化の起こる領域がせまいので、横軸のスケールも温度分布は速度分布の2倍にとつてある。

これらの結果をみると、速度分布では熱源の大きさを大きくしても対流の起こる領域はほとんど変らなへし、速度もそれ程増加しない。ただ上へゆくにつれてまわりからの流入が大きくなつてゐるいわゆる加速流があるのだ、その値が中心部でいくらか増加してゐる。

温度分布については、上へゆくにつれて徐々に冷やされて温度は小さくなるが、これを熱源の大きさについて比較してみると分布としてはほとんど同じであつて、特に大きな差異は認められない。そればかりか、相対的に熱源の大きなものは総熱量が大きいことで中心部の動きの大きいところ集中する傾向を示してゐる。そしてこのことは中心線上をとつた二つの図を較べるとき、総供給熱量の大きい $D=10\text{ mm}$ の方が 7 mm に比して速度・温度ともに大きくなつてゐることで明らかである。

実験装置 及び 方法

・熱源 9 図に示すようにテフロン柱に 0.1mm のニクロム線をまきつけ、これを銅円筒内部にうめこみ、その銅円筒をアクリル板にあけられ、上部表面が一致するようにとりつけ、下部を断熱材でかためてある。熱源の直径 D は 10mm , 7mm , 3mm の 3 種類であるが、 3mm のものは内部に工作ができないため、アクリル板の下部につき出た部分にニクロム線をまきつけて加熱した。このニクロム線に通電することによって円筒が加熱されて熱源となるが、その電流の値により熱源の温度を制御する。この円筒表面での測定によれば、円周部より中心にゆくにつれて温度は高くなるが、温度差が大きくないつ時に円周部の少しを除いてほぼ一様とみなせる。



・水槽 内径 30cm と 14.4cm と円筒形のアクリル製水槽と、一辺 15cm の立方体のアクリル製角型水槽を使用した。光学的測定のための角型水槽には相対する二面に光学ガラスが入れてある。両水槽とも熱源を水槽の中心におき、熱源上面より 10cm の水深で水を満ちして、熱対流による流場を作り、以下の測定を行つた。

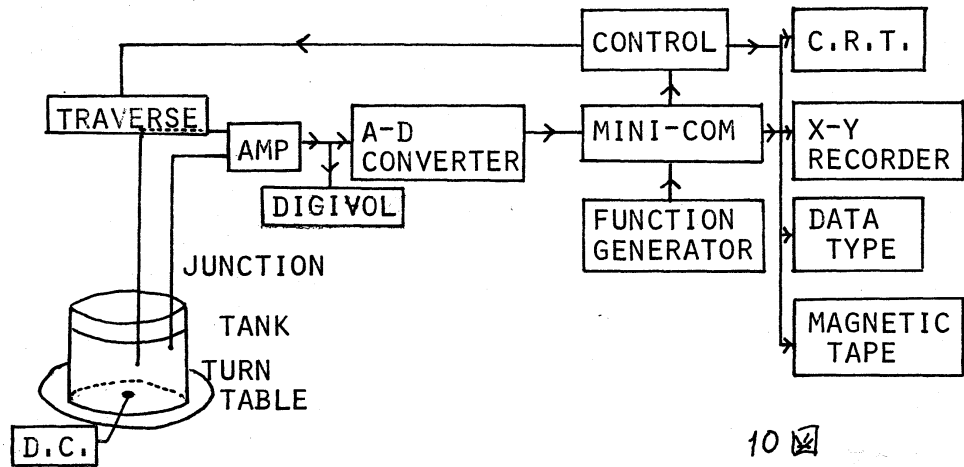
・回転台 ダイレクトドライブ形のレコードプレーヤーを利用し、小型モーターと変速ギヤーによる回転をプーリーで運

動させて毎分0.8回～9回の回転をさせられる。熱源への電流の供給は回転台上に小型蓄電池をのせて行った。

・速度測定 一般に用いられる流速の測定装置のうち、熱線流速計は流れ自身に温度変化があるために使用出来ない。またレーザードップラー流速計(LDV)は温度場にも流れ場にも影響がなく、速度場の測定が可能であると思われ、試みられたが、現在使用のLDVでは 7mm/sec が測定可能な最小流速であるのに対して、熱対流でおこされる流速は非常に小さく、しかも中心のごく小さな領域でしか測定が出来ない。そこで、大まかな速度分布を求めるために、水素気泡法による可視化と、アルミニウム粉末の顕微鏡による視野の通過時間を測定するという方法が用いられた。

・温度測定 0.1mm の銅コンスタンタン熱電対を用い、流れ場中を回転中心を通る線上でトラバースして、以下にのべるデータ処理を行った。

・データ処理 熱対流の実験は不安定さに非常に敏感であるために、これまで静かな環境のもとでわずかな擾乱も与えないような努力をすることによってなされてきた。しかし今回のように回転の効果も考慮すると、擾乱を与えないことは不可能である。そこでミニコンによる統計的なデータ処理を熱電対の出力による温度分布の測定に試みた。即ち10

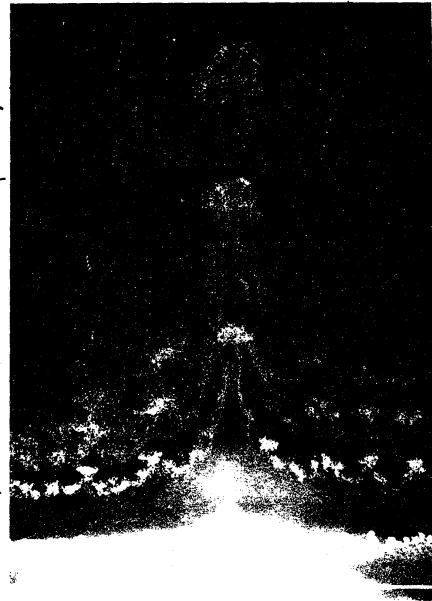


10図

図のブロックダイヤグラムのように、熱電対の出力をある時間間隔で測定し、A/Dコンバーターでデジタル化してミニコンに蓄えてのち、平均して1点の測定を終了する。1点の測定のうち、ある時間だけトラバース装置を動かして、次の測定点に移って測定をくり返すことにより、1つの高さで測定ができる、これを高さを表えてくり返すことにより温度場の測定ができる。1点に対しては毎秒20回、5/2回の平均をとり、1つの高さについては16点の測定をした。これらの測定はブラウン管(CRT)でモニターできるとともにXYレコーダーで記録され、タイプライターで平均値、変動値などが打ち出され、又磁気テープに記録されて必要に応じて読み出すことができる。中心を通る面上でいろいろな高さについて、この測定を行うが、高さの設定及び初期の点の設定については手動により行う。

§ 測定結果

○速度測定 直径7mmの熱源より9流れの速度分布を水素気泡法で撮った写真の例も11図に示す。水素気泡の発生する白金線の高さは約5mmであつて、1.5秒おきにストロボ発光したものであるが、下方では速度が小さく少し上方で急に大きくなつてゐる。これには水素気泡自身の密度差による浮



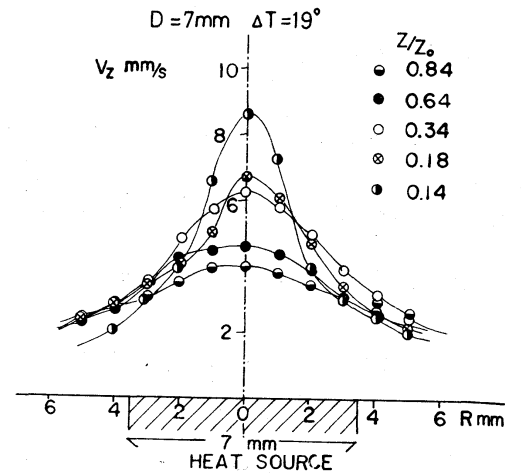
11図

力が重畳してゐる9で、この分を差し引くと中心部分で約10mm/secの速度があることがわかる。又それが大きくなるとともに上昇流にゆらぎがはいることもあつて、正確な速度分布とはいえないが、ある程度の分布を知るのには十分であらう。またLDDでは測定可能な流速は7mm/sec以上であることを考慮すると、中心のごく細い部分しか測定は可能でなく、それも前後左右にゆらく不安定性が加わることで、定量的な測定は不可能であつた。しかしLDDの信号として、時々とらえた流速は約10mm/secであつて、水素気泡やこの後のアルミニウム粉末の粒子の運動をはかつたものと大概は一致する。12図はアルミニウム粉末よりの流速分布であつて、いろいろの高さでの流速を示してあるが、底面近く9小さな速度はとら

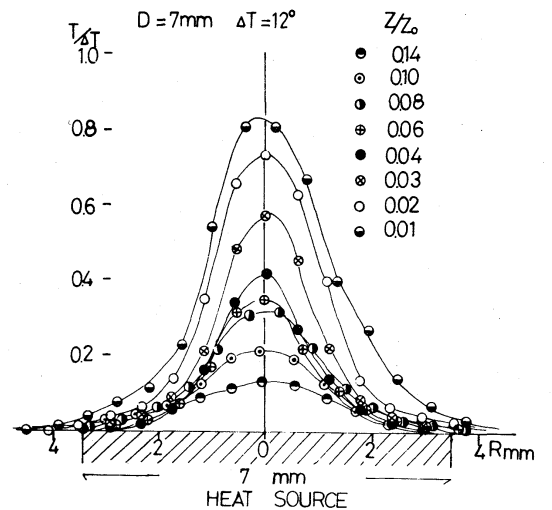
えられたい。

・温度測定 熱電対による温度測定のうち $D = 7\text{ mm}$, $\Delta T = 12^\circ$ のばあいのミニコンを用いて行った測定結果を13図に示す。熱源の直径 D のちがういくつかの測定の結果から、熱源からの上昇流は上にゆくにつれて温度はさかると同時に、高温を示す中もせまくなる。

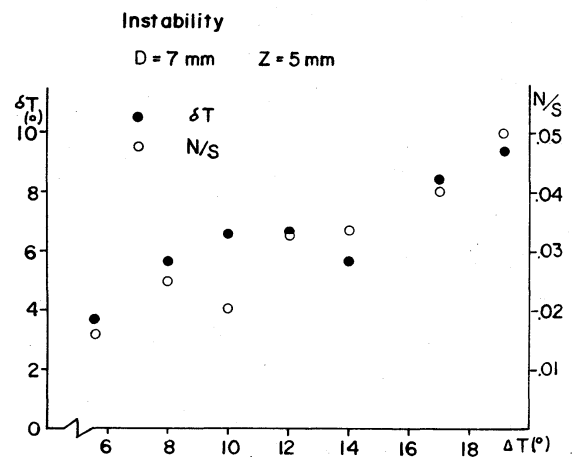
熱対流において上昇流は温度差が非常に小さい時以外は、前後左右にゆらぎ、また間欠的に上昇を行う。温度についてもそれにつれて規則的な変動がみられる。このゆらぎの振動数は熱源の温度差にほぼ比例して増大するし、同様に温度変動の大きさも増大する。14図には $D = 7\text{ mm}$ の熱源からのゆらぎの周波数と温度変動



12 図



13 図



14 図

を温度差に対し、高さ $h = 5\text{mm}$ を測定したものを示してある。この周波数は上昇流のあるところでは、一つの温度差に対してはどこで測定しても同じであるが、温度の変動は中心で大きく周辺の流れのほどにない領域にゆくにつれて減少する。そして変動の大きい中心部ではさえた温度差の $1/2$ 程度となるが、更に温度差を増してゆくと規則的な変動の中に不規則なスケールの大きな温度変動が重畳されてあらわれはじめ、いわゆる乱流遷移の様相を呈しはじめる。この乱れがなせる限界は温度等ではきめられず、周囲の状態によって非常に大きく影響を受け、いわゆる乱流遷移がバフクグラウンドの乱流に影響されるのと同じである。

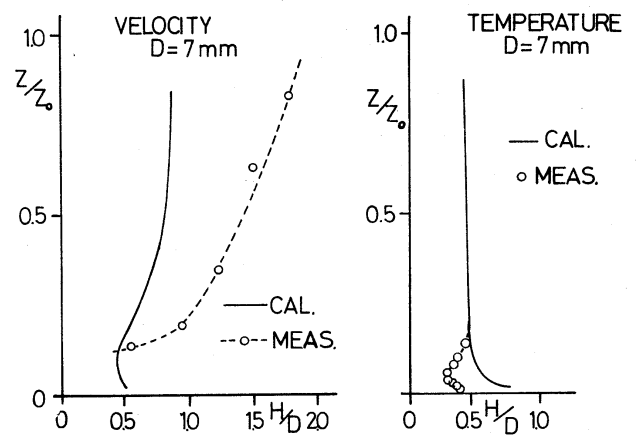
3 計算と実験との比較検討

数値計算と実験の結果を速度分布・温度分布で比較したとき、速度分布では計算が加速流を示しているのに対して、実験では減速流になっていることが一層大きく異なっている。これはどの測定についてもいえることであるが、数値計算には計算自身の収束性という不安定さを含んでいるが、流れ自身がゆらぎを示す不安定性の要素は入っていない。すなわち測定では前後左右のゆらぎと間欠性を考慮して、それらも含めたある回数平均をとることをしている。その上

の中心部は上へゆくにつれて増加するが、測定値が小さい値を示すのは当然である。又同様に熱源に近いところの絶対値でも測定値が小さいのは、測定性もふくめて平均をとっているからである。温度分布についても、測定値の方が計算値よりも小さい値を示しているが、この原因としては実験の際に外側がいかに低く一様温度になつていないで、総熱量が小さいことも考えられるが、やはり温度が周期的に変化し、その平均をとっていることが影響していると思われる。

数値計算と測定の分布

より求めた半値中Hを、
 5図に速度と温度をそれぞれ無次元にして示す。
 速度については測定値の
 中がなくなつてゐるが、
 高い場所では速度そのもの
 が低く見接されてゐる



が、中がなくなつてゐるものと思われる。いずれにしても
 速度温度ともに熱源の大きさよりも小さい部分で、すなわち
 熱源の中心のごく狭い領域において熱対流の大部分がおきて
 いることは明らかである。

とあわりに

大きさをもつた熱源からの熱対流を数値計算と実験によつて検べた。熱対流は熱源の大きさよりもむしろ小さな範囲で、また熱量を大きくしても対流の領域が特に広がることなく小さな部分だけでほげしく行われることが認められた。実験の測定では熱対流にともなう運動のゆらぎや不均質性が、流れ自身に大きく影響しており、それらを考慮してない数値計算とは直接比較しえないが、定性的にはよい一致を見た。

参考文献

- 1) G.K.Batchelor; Quart.J.Roy.Met.Soc. 80 339-358 (1954).
- 2) B.R.Morton, S.G.Taylor and J.S.Turner; Proc.Roy.Soc, A 234 1-23 (1956).
- 3) A.A.Townsend; J.Fluid Mech. 41 13-46 (1970).
- 4) Y.Oshima; Natural Science Rep.Ochanomizu Univ. 15-2, 65-82 (1964).
- 5) J.S.Turner; Annual Review 1 65-82 (1964).